

Olimpiada Națională de Matematică**Etapa locală****10 februarie 2024****Clasa a X-a****Problema 1.**

a) Calculați $E = \lg^3 5 + \lg^3 20 + \lg 8 \cdot \lg 0,25$.

b) Calculați $\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2}$.

Problema 2.

a) Se consideră mulțimile $A = \{z \in \mathbb{C} / |z - 1| = 1, \left\lfloor \frac{1}{|z-2|} \right\rfloor = 1\}$ și

$B = \{|z| / z \in A\}$, unde $[y]$ este partea întreagă a numărului real y .

Aflați mulțimea B .

b) Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 care îndeplinesc condițiile:

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \neq -1$.

Arătați că $\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3}{1 + z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} \in \mathbb{R}$.

Problema 3.

a) Determinați mulțimea

$M = \{m \in \mathbb{R} / 3 \cdot 4^x + (m - 1) \cdot 2^x + m > 0, (\forall) x \in (0, \infty)\}$.

b) Arătați că $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5$.

Problema 4.

Fie $f: [1, 2] \rightarrow [36, 59]$, $f(x) = x^2 + (3m - 1) \cdot x + 2m + 1$.

Determinați mulțimea $M = \{m \in \mathbb{R} / f \text{ este bijectivă}\}$.

Notă: Fiecare subiect este notat cu 7p.***Timp de lucru 3 ore.***